## Chapitre 2

# Les circuits oscillants

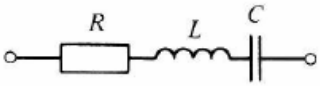
**SamyLab**

**16/01/2009**

# I. La résonance

## I.1. Circuit résonants série

Soit un circuit RLC série, une tension $v(t) = Ve^{j\omega t}$ est appliquer à ces bornes:




Le courant qui traverse le circuit s'écrit : $i(t) = \frac{v(t)}{z_T} = \frac{Ve^{j\omega t}}{|z_T|e^{-j\varphi}} = \frac{V}{|z_T|}e^{(j\omega t - \varphi)}$

Avec : $z_T = R + z_L + z_c = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\dfrac{\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}{R} \end{cases}$$

Le courant est donné donc par : $i(t) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} e^{(j\omega t - \varphi)}$

Pour : $L\omega = \frac{1}{C\omega} \Longrightarrow z = R$

- L'impédance du circuit devient minimale et égale à la résistance Z = R.
- La tension et le courant sont donc en phase.
- L'amplitude de courant est maximale $I = I_0 = \frac{V}{R}$,

On dit que le circuit est en résonance.

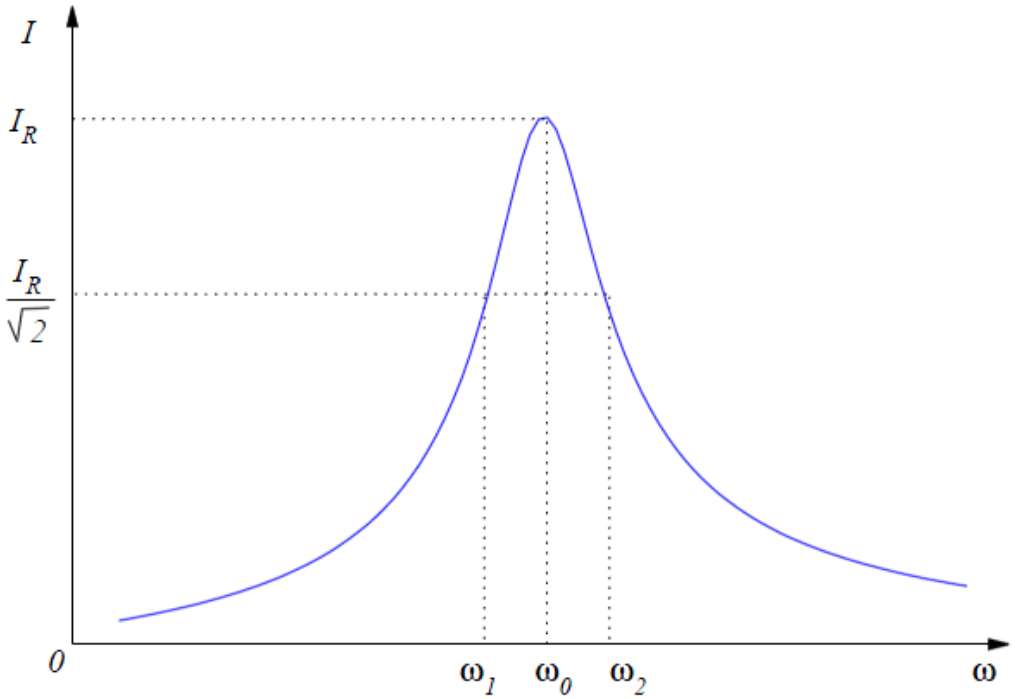
$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Longrightarrow f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ Cette fréquence est appelée fréquence de résonance $f_0$.

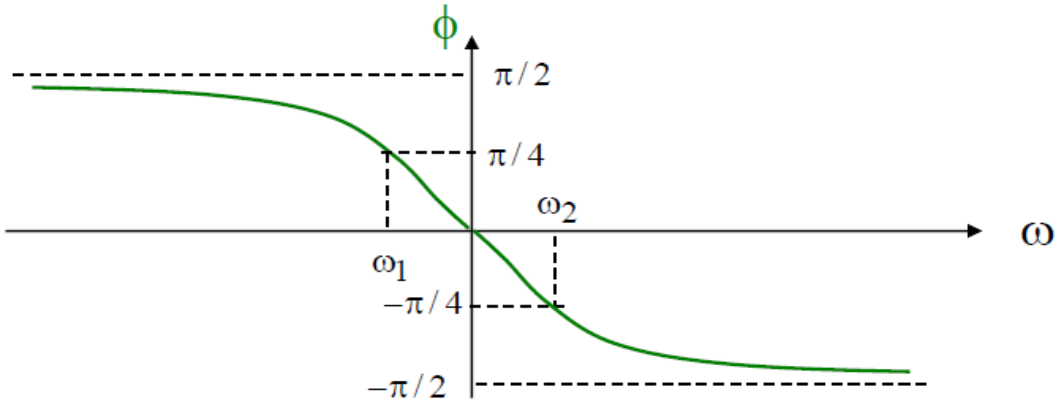
A la fréquence de résonance la tension aux bornes de la self et celle aux bornes de la capacité sont égales mais déphasées de 180 °, dans cas il y a un échange total d'énergie entre la self et la capacité.

Si on varie la fréquence de la tension appliquée à un circuit RLC série :

- pour $f > f_0$ ou $L\omega > \frac{1}{C\omega} \Longrightarrow \varphi > 0$ on dit que le dipôle est inductif.
- pour $f < f_0$ ou $L\omega < \frac{1}{C\omega} \Longrightarrow \varphi < 0$: on dit que le dipôle est capacitif.
- à la résonance $f = f_o$ : le dipôle devient résistif (z=R).

Les variations de l'amplitude et la phase de courant i en fonction de la fréquence sont données par les graphes suivants :




On appelle bande passante du circuit le domaine $[\omega_1, \omega_2]$ avec $\boldsymbol{I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}}$.

D'ou la largeur de la bande passante : $\boldsymbol{B = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}}$

On définit le facteur de qualité de circuit Q par : $Q = \frac{Réactance}{Resistance\ \ série} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}$

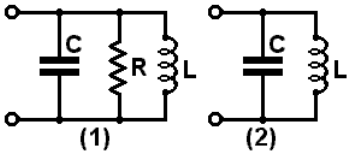
Les tensions $V_C$ et $V_L$ à la résonance peuvent être très élevés par rapport a v(t).

Le facteur de qualité est appelé au facteur de surtension.

On montre que : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ c'est à dire que la bande passante est d'autant plus étroite que Q est grand.
On dit alors que la résonance est aigüe et que le circuit est très sélectif.

## I.2. Circuit résonants parallèle (circuit bouchon)

Il se compose essentiellement d'une capacité C et d'une self L branchés en parallèle. On peut avoir une résistance R en parallèle ou en série avec sur un des branches.




- (1) circuit bouchon amorti par une résistance pour diminuer sa sélectivité.
- (2) circuit bouchon idéal.

Soit un circuit RLC parallèle, la tension est la même aux bornes de l'inductance, aux bornes de la capacité et aux bornes de la résistance.

L'admittance totale de circuit : $y = Y_R + Y_L + Y_C = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$

D'où l'impédance totale : $z = \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}+jC\omega}$

$$\begin{cases} |z| = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)^2}} \\ \varphi = \tan^{-1}\dfrac{\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}{R} \end{cases}$$

Le courant totale est donné donc par : $i(t) = V\left(\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}\right)e^{(j\omega t - \varphi)}$

Pour $f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ :

- Le courant total et la tension sont en phase.
- L'impédance passe par sa valeur maximale z=R.
- L'amplitude de courant est minimale $I = I_0 = \frac{V}{R}$, on dit que le circuit est en résonance.

À cause du déphasage entre la tension et le courant dans chacun de ces composants, les courants $I_L$ et $I_C$ s'opposent et s'annulent. Ainsi le courant du circuit est égal au courant de la résistance et est en phase avec la tension appliquée. Les courants dans les composants réactifs ($I_L$ et $I_C$) peuvent être très élevés par rapport au courant total du circuit.

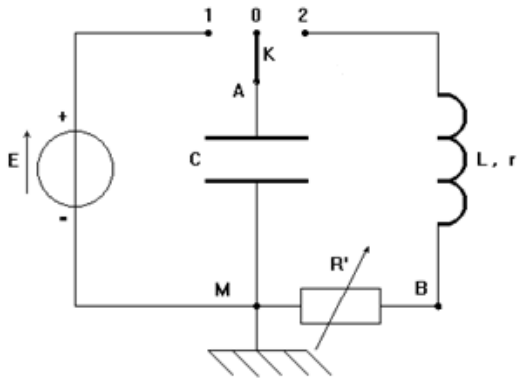
On dit que $f_0$ est la fréquence d'antirésonance.

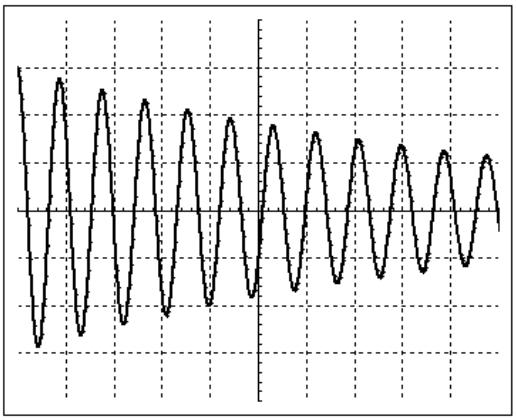
On définit le facteur de qualité de circuit Q par : $Q = \frac{Resistance\ \ parall\ èle}{Réactance} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR$

On montre que : $Q = \frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\Delta\boldsymbol{\omega}}$

## II. Oscillations d'un circuit RLC

Dans le montage ci-dessous, on charge le condensateur en plaçant le commutateur sur la position 1. Lorsque le condensateur est chargé, on bascule le commutateur en position 2. On réalise ainsi un circuit (R, L, C).



On observe des oscillations dont l'amplitude décroît au cours du temps.

La vitesse de décroissement dépend de la résistance. Pour de faibles valeurs de la résistance R, on observe des oscillations dont l'amplitude décroît progressivement. La tension tend rapidement vers zéro si R augmente. Pour des grandes valeurs de R, la tension tend vers zéro sans oscillations.

### II.1. Étude analytique des oscillations libres.

La loi des mailles permet d'écrire :$v_c(t) + v_R(t) + v_L(t) = 0$

Posant l'équation différentielle de courant: $\frac{1}{C}\int idt + Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = 0$

Comme $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ l'équation devient : $\frac{1}{C}q(t) + R\frac{dq(t)}{dt} + L\frac{d^2q(t)}{dt^2} = 0$

Durant les oscillations libres la charge électrique de condensateur obéit à l'équation différentielle:

$$q'' + 2\lambda q' + \frac{1}{{\omega_0}^2}q = 0$$

Avec : $\lambda = \frac{R}{2L}$ est le coefficient d'amortissement et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre.

**Cas des oscillations libres (R=0):**

Le circuit devient un circuit (L, C) de résistance nulle, c'est un cas idéal.

L'équation différentielle de courant devient : $q'' + \frac{1}{{\omega_0}^2}q = 0$ , qui est une équation linéaire en i, du second ordre, sans deuxième membre.

Elle admet une solution générale de la forme : $q(t) = q_0 \cdot sin(\omega_0 t)$

D'où le courant circulant dans le circuit s'écrit : $i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = q_0\omega_0 cos(\omega_0 t)$

C'est un courant sinusoïdal, on dit qu'il s'agit d'un régime d'oscillation sinusoïdale libre.

Au cours des oscillations libres d'un circuit LC, il y a conversion de l'énergie électrique emmagasinée par le condensateur (charge et de la décharge) en énergie magnétique emmagasinée par la bobine (induction), et réciproquement.

**Cas des oscillations libres amorties (R différent de 0):**

Dans ce cas on a une équation linéaire du second ordre sans deuxième membre :

$$q'' + 2\lambda q' + \frac{1}{{\omega_0}^2} q = 0$$

Les solutions se l'équation dépendent des éléments de circuit :

Si : $\lambda = \omega_0 \; donc \; R_c = R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, $R_C$ est la résistance critique.

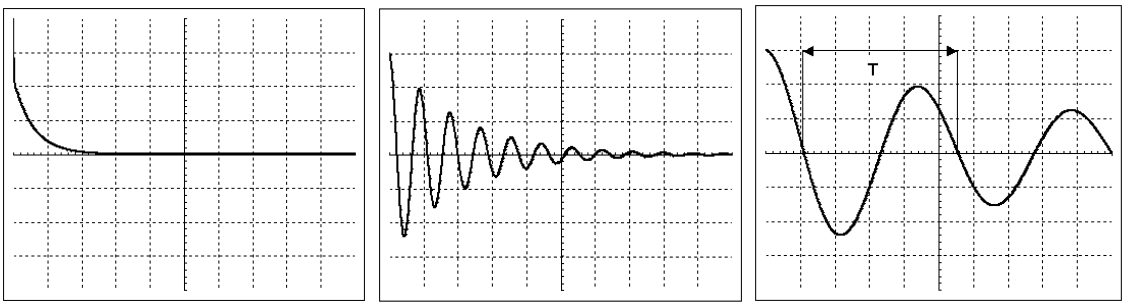
Les solutions de l'équation sont de type : $q(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$ , c'est le régime critique.

Si : $\lambda > \omega_0 \; donc \; R > R_c$. Les solutions de l'équation sont de type :

$q(t) = Ae^{(-\lambda+\Omega)t} + Ae^{(-\lambda-\Omega)t}$ , avec $\Omega^2 = \lambda^2 - {\omega_0}^2$ , c'est le régime apériodique.

Si : $\lambda < \omega_0 \; donc \; R < R_c$. Les solutions de l'équation sont de type :

$q(t) = Ae^{-\lambda t}cos(\Omega t + \varphi)$ , avec : $\Omega^2 = \lambda^2 - {\omega_0}^2$, c'est le régime pseudo périodique, le phénomène possède une pseudo-période : la pseudo-période T est la durée entre deux passages consécutifs par la valeur nulle de courant.




En présence de résistance l'énergie électromagnétique stockée dans la capacité et la self diminue car elle est dissipée en chaleur dans la résistance par effet Joule. On dit que le circuit est le siège d'oscillations électriques libres amorties.

**Conclusion :**

Dans un circuit oscillant qui comporte une résistance, il y a échange d'énergie entre le condensateur et la bobine, provoquent des oscillations électriques. Si l'amortissement est négligeable, l'énergie totale du système se conserve et l'oscillation est sinusoïdale. Mais comme tout circuit électrique comporte une résistance, l'énergie totale du circuit diminue progressivement par effet Joule.

Les oscillations paraissent sinusoïdales de période T 0 égale à la période propre du circuit (L, C).

Avec ce dispositif, le circuit puise périodiquement, à sa propre fréquence l'énergie dans le dipôle D.

### II.2. Étude analytique des oscillations forcés

Dans ce cas l'équation des tensions devient : $v_c(t) + v_R(t) + v_L(t) = e(t)$

D'ou: $\frac{1}{C}\int idt + Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = e(t)$

En fonction de la charge, on peut écrire : $\frac{1}{C}q(t) + R\frac{dq(t)}{dt} + L\frac{d^2q(t)}{dt^2} = e(t)$

D'où: $q'' + 2\lambda q' + \frac{1}{\omega_0{}^2}q = \frac{1}{L}e(t)$

La solution de cette équation est la somme de deux solutions :

- Solution sans deuxième membre donc sont les solutions de régime libre
- Solution avec deuxième membre.

Donc la tension aux bornes de condensateur est la somme de deux tensions :

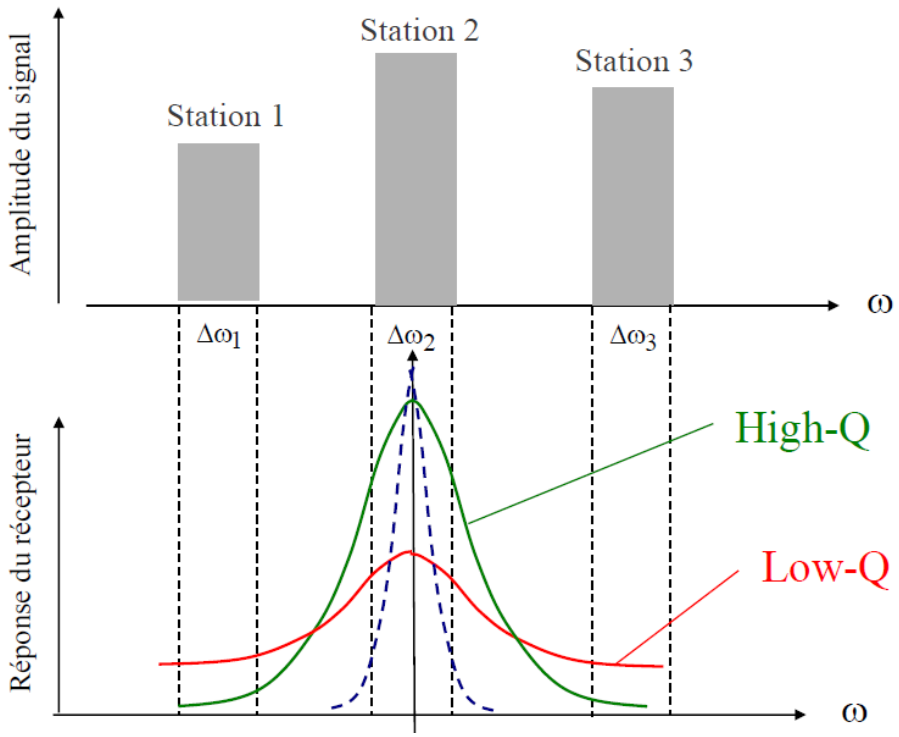
$$v_c(t) = v_{c\ libre} + v_{c\ forcé}$$

Apres un certain temps le régime libre est amorti, (régime transitoire) la tension $v_{c\ libre} = 0$, et le circuit suit le régime forcé (régime permanent) $v_c(t) = v_{c\ forcé}$ .

## III. Applications :

### III.1. Circuit d'accord

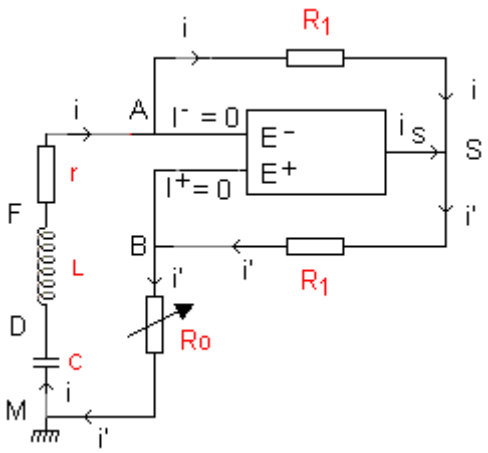
On utilise un circuit résonant dans un récepteur radio pour sélectionner une station parmi d'autres, il est important d'utiliser un circuit avec un grand facteur de qualité pour éviter de recevoir les signaux d'une station adjacente.



### III.3. Oscillateur à résistance négative

Pour obtenir des oscillations non amorties dans un circuit (R, L, C), il faut lui fournir de l'énergie pour compenser les pertes par effet Joule dans les résistances.

On introduit dans le circuit (R, L, C), un dipôle D dont le rôle est de fournir au circuit l'énergie perdue par effet Joule. On utilise un circuit à amplificateur opérationnel :




En régime linéaire (non saturé), on a $V_{E+E-} = 0\ volt$ .

Posant l'équation la maille ASBA : $v_{AS} + v_{SB} + v_{BA} = 0 \implies R_1 i + R_1 i' + 0 = 0$

On en déduit : $i' = -i$ d'où : $v_{AM} = -R_0 i$

Pour la maille de RLC : $v_c + v_L + ri + v_{AM} = 0 \Longrightarrow v_c(t) + v_L(t) + ri - R_0 i = 0$

Il suffit de mettre $R_0 = r$ pour annuler la partie résistive du circuit et avoir des oscillations stables. On dit que les oscillations sont entretenues.

La partie ABM de circuit constitue un dipôle qui se comporte comme une "résistance négative" car ( $v_{AM} = -R_0 i$ ). Ce circuit est appelé : ''montage à résistance négative''.