Chapitre 2 : Les filtres analogiques

1. Définitions

Un filtre analogique est un quadripôle qui ne laisse passer que certaines composantes fréquentielles de signal appliqué à l'entrée et bloque ou atténue d'autres.

Le domaine de fréquence où le signal passe est appelé bande passante de filtre.

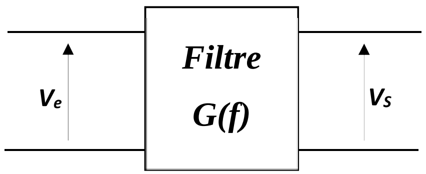

Figure 1 : Représentation d'un filtre

Un filtre est passif s'il ne contient que des composants passifs (R,L,C). Son gain est toujours inférieur à 1 (Atténuation de signal).

Un filtre est actif contient des composants actifs comme les transistors, ampli op. Le gain des filtres actifs est supérieur à 1 (amplification de signal).

2. Fonction de transfert d'un filtre

2.1. Définition

La fonction de transfert d'un filtre est définie par le rapport entre la tension à sa sortie et la tension à son entrée, en fonction de la fréquence.

$$G = \frac{V_s}{V_e}$$

L'ordre d'un filtre est défini par la plus grande puissance de la fréquence au dénominateur de sa fonction de transfert

Exemple :

Un filtre de deuxième ordre : $G(f) = \dfrac{2}{1 + jf^2}$

2.2. Représentation graphique de la fonction de transfert

Il est possible de représenter graphiquement la fonction de transfert d'un filtre en utilisant le diagramme de Bode. On trace les variations du module (en dB) et de la phase de la fonction de transfert en fonction de la fréquence.

$$\begin{cases} |G(f)|_{dB} = 20Log|G(f)| \\ \varphi(f) = Arg[G(f)] \end{cases}$$

2.3. La fréquence de coupure d'un filtre

La fréquence de coupure f_C d'un filtre est définie comme étant la fréquence pour laquelle le module de la fonction de transfert égale sa valeur efficace.

$$|G(f_C)| = \frac{|G(f)|_{max}}{\sqrt{2}}$$

En échelle décibel : $|G(f_C)|_{dB} = (|G(f)|_{max})_{dB} - 3dB$

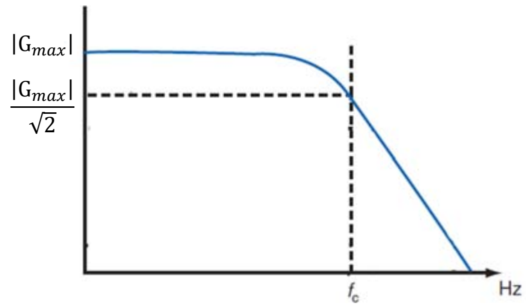

Figure 2 : La fréquence de coupure d'un filtre

3. Différents types de filtres

3.1. Filtre passe bas

Un filtre passe bas ne laisse passer que les fréquences inférieures à sa fréquence de coupure.

3.2. Filtre passe haut

Un filtre passe haut ne laisse passer que les fréquences supérieures à sa fréquence de coupure.

3.3. Filtre passe bande

Un filtre passe bande ne laisse passer qu'une bande de fréquences limitée par deux fréquences de coupure f_{C1} et f_{C2}.

3.4. Filtre coupe bande

Un filtre coupe bande passe toutes les fréquences à part une bande spécifique.

3.5. Filtre déphaseur

Un filtre déphaseur passe toutes les fréquences de la même façon, mais il modifie la phase de signal.

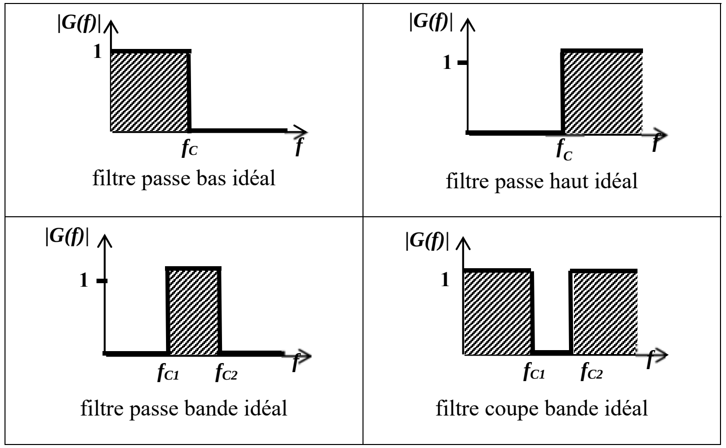

Figure 3 : Tracé de module de la fonction de transfert pour différents types de filtres.

4. Etude des filtres passe bas

4.1. Etude d'un filtre passe bas de premier ordre

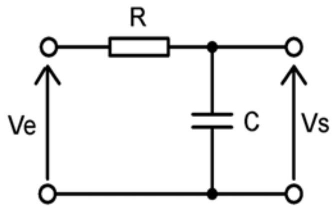

Figure 4 : Filtre RC passe bas

Analysons le comportement du circuit de la figure (4) en fonction de la fréquence :

Pour les basses fréquences : l'impédance de la capacité tend vers l'infinie, elle se comporte comme un circuit ouvert. Donc : Vs=Ve et G=1.

Pour les hautes fréquences : l'impédance de la capacité tend vers 0, elle se comporte comme un court-circuit. Donc : Vs=0 et G=0.

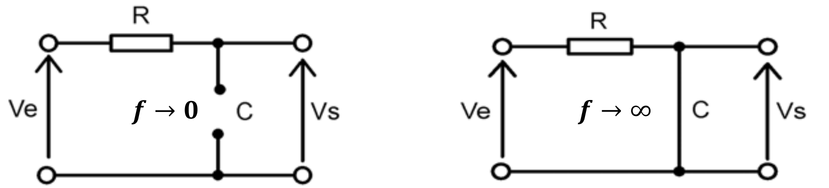

Figure 5 : Circuits équivalents du filtre de la figure (4).

Ce filtre laisse passer les basses fréquences et ne laisse pas passer les hautes fréquences. Il s'agit d'un filtre passe bas.

Calculons sa fonction de transfert : $G(j\omega) = \frac{Z_C}{R+Z_C} = \frac{1}{1+jRC\omega}$

On écrit :

$$G(j\omega) = \frac{G_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_C}} \; Avec: \; \omega_C = \frac{1}{RC} \text{ et } G_0 = 1$$

C'est la forme de la fonction de transfert d'un filtre passe bas du premier ordre. On montre que ω_C est la pulsation de coupure de ce filtre.

On calcule le module et l'argument de la fonction de transfert :

$$\begin{cases} |G(\omega)| = \dfrac{G_0}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}} \\ \varphi(\omega) = -arctg\left(\dfrac{\omega}{\omega_C}\right) \end{cases}$$

On met la fonction de transfert en échelle décibel :

$$|G(\omega)|_{dB} = 20\log|G(\omega)| = (G_0)_{dB} - 10\log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2\right)$$

Comportement du filtre en basse fréquence : $\boldsymbol{\omega \ll \omega_C}$ *ou bien* $\boldsymbol{\frac{\omega}{\omega_C} \to 0}$

- $|G(\omega)|_{dB} \approx 20\log(G_0)$. Le diagramme de gain présente une asymptote horizontale d'équation $|G(\omega)|_{dB} = 20\log(G_0)$.
- $\varphi(\omega) \approx 0°$. Le diagramme de phase présente une asymptote horizontale.

Comportement du filtre en haute fréquence : $\omega \gg \omega_C$ ou bien $\frac{\omega}{\omega_C} \to \infty$

- $|G(\omega)|_{dB} \approx -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)$. Le diagramme de gain présente une asymptote oblique.
- $\varphi(\omega) \approx -90°$. Le diagramme de phase présente une asymptote horizontale.

La pente de l'asymptote oblique est $-20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)$.

On montre que si $\omega_2 = 10\omega_1$ Alors : $|G(\omega_2)|_{dB} = |G(\omega_1)|_{dB} - 20dB$. On dit qu'il s'agit d'une pente de -20 dB/décade.

L'asymptote horizontale est l'asymptote verticale se rejoignent en $\omega = \omega_C$.

Points particuliers du diagramme réel :

Lorsque $\omega = \omega_C$: $|G(\omega)|_{dB} \approx -3\text{dB}$ et $\varphi(\omega) \approx -45°$

Tracé de diagramme de Bode :

Le tracé du module et de la phase de la fonction de transfert pour G_0=1 en fonction de la fréquence normalisée $f/f_C = \omega/\omega_C$ est donné par les courbes suivantes :

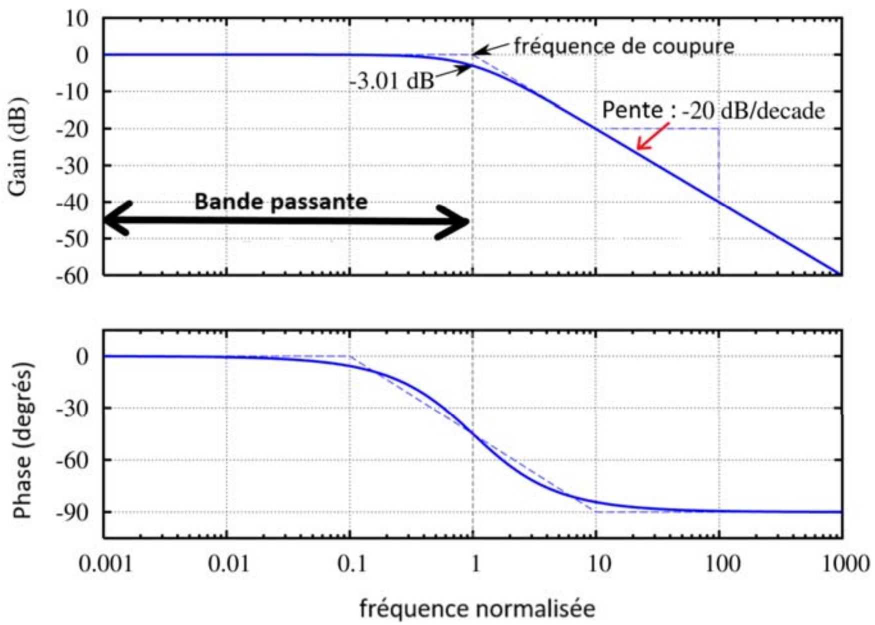

Figure 6 : Tracé de diagramme de Bode d'un filtre passe bas.

Dans la bande passante le gain du filtre est très proche de 1, et le déphasage entre l'entrée et la sortie est nul.

En dehors de la bande passante, le gain du filtre diminue de -20dB/décade en montant en fréquence, en plus le déphasage entre le signal de sortie et le signal d'entrée est entre 45° et 90°.

4.2. Mise en cascade de n cellules RC

La mise en cascade de « n » cellule RC passe bas, forme un filtre passe bas d'ordre « n ». Dans ce cas, chaque cellule ajoute -20dB/décade à la pente de gain. Donc pour n éléments, l'atténuation est de $n \times (-20dB/\text{décade})$. Il faut augmenter le nombre d'éléments pour se rapprocher de la réponse d'un filtre idéal.

5. Etude d'un filtre passe haut de premier ordre

Analysons le comportement de circuit suivant en fonction de la fréquence :

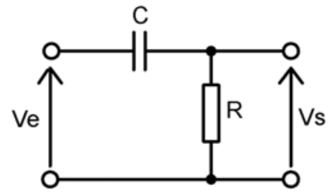

Figure 7 : Filtre RC passe haut

Pour les basses fréquences : la capacité se comporte comme un circuit ouvert. Donc Vs=Ve et : G=1.

Pour les hautes fréquences : la capacité se comporte comme un court-circuit. Donc Vs=0, et : G=0.

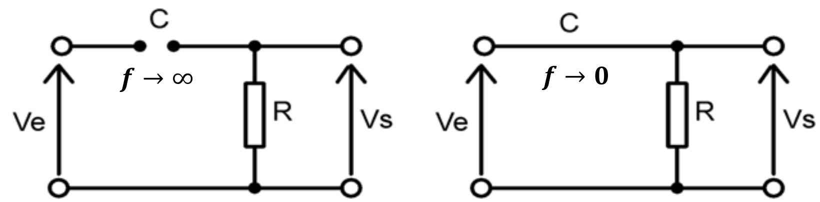

Figure 8 : Circuits équivalents du filtre RC passe haut.

Ce circuit laisse passer les hautes fréquences et ne laisse pas passer les basses fréquences. C'est un filtre passe haut.

La fonction de transfert s'écrit :

$$G(j\omega) = \frac{jG_0 \dfrac{\omega}{\omega_C}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_C}} \ Avec : \ \omega_C = \frac{1}{RC} \text{ et } G_0 = 1$$

C'est la forme de la fonction de transfert d'un filtre passe haut du premier ordre. On montre que f_C est la fréquence de coupure de ce filtre.

Le module et l'argument de la fonction de transfert :

$$\begin{cases} |G(\omega)| = \dfrac{G_0 \dfrac{\omega}{\omega_C}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}} \\ \varphi(\omega) = \dfrac{\pi}{2} - arctg\left(\dfrac{\omega}{\omega_C}\right) \end{cases}$$

Le tracé de ces deux fonctions pour G_0=1 en fonction de la fréquence relative $f/f_C = \omega/\omega_C$ est donné par les courbes suivantes :

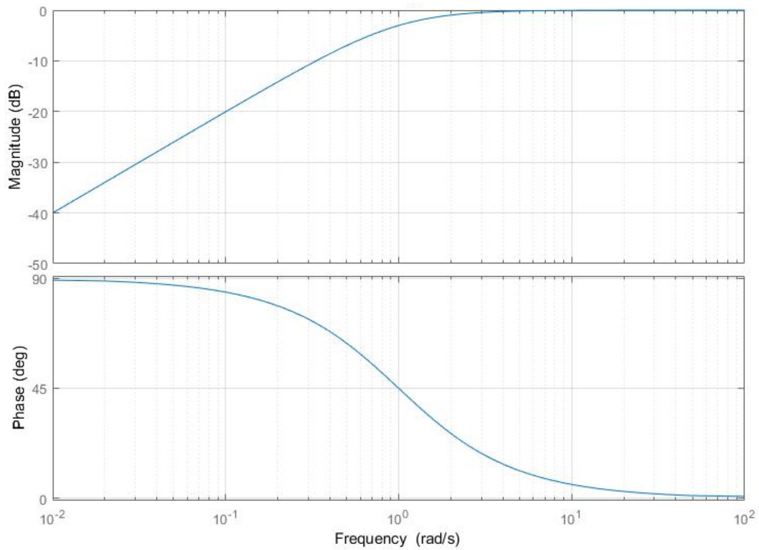

Figure 9 : Tracé de diagramme de Bode d'un filtre passe haut.

Le montage de plusieurs cellules RC passe haut en cascade modifie la fréquence de coupure de système. En plus, chaque cellule ajoute -20dB/décade à la pente de gain qui se rapproche à celle de la réponse d'un filtre passe haut mais le filtre devient très encombrant.

6. Etude d'un filtre passe bande

Un filtre passe bande peut être considérer comme un filtre haut en cascade avec un filtre passe bas. Donc, l'ordre d'un filtre passe bande est de 2 et plus.

Pour le circuit (A) de la figure 10, nous avons un condensateur en série pour le filtre passe haut, suivi par une inductance en série pour le filtre passe bas.

A la fréquence de résonance de circuit, l'impédance de la branche qui contient la self et la capacité est nulle donc le gain du circuit devient maximal.

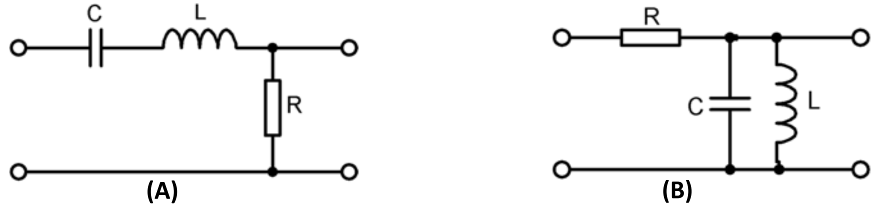

Figure 10 : Filtre passe bande RLC.

Pour le circuit (B) de la figure 10, la capacité en parallèle joue le rôle d'un filtre passe bas, tandis que l'inductance en parallèle joue le rôle d'un filtre passe haut. A la résonance, l'impédance totale de la self et la capacité devient infinie donc le gain du circuit devient maximal.

La fonction de transfert du circuit (A) :

$$G(j\omega) = \frac{R}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{-LC\omega^2 + jRC\omega + 1}$$

C'est une fonction de transfert de deuxième ordre.

$$|G(\omega)| = \frac{RC\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} \ et \ \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right)$$

On montre que les fréquences de coupures s'écrivent :

$$\begin{cases} f_{C1} = \dfrac{1}{2\pi}\left(-\dfrac{R}{2L} + \sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{LC}\right)}\right) \\ f_{C2} = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{R}{2L} + \sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{LC}\right)}\right) \end{cases}$$

La bande passante de filtre est donnée par :

$$BP = f_{C1} - f_{C2} = \frac{1}{2\pi}\frac{R}{L}$$

Le facteur de qualité de ce filtre s'écrit :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} \qquad Avec : \ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ci-dessous, on donne le tracé de module de la fonction de transfert du filtre en (dB) en fonction de la fréquence. La fréquence de résonnance de circuit f_0 devient la fréquence centrale de filtre passe bande.

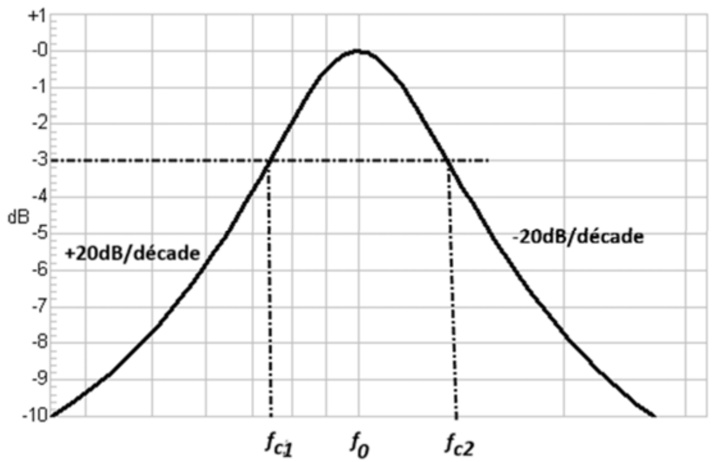

Figure 11 : Tracé de module de la fonction de transfert du filtre passe bande (A).

Il est possible d'écrire la bande passante en fonction du facteur de qualité :

$$BP = \frac{f_0}{Q}$$

Pour élargir la bande passante d'un filtre passe bande il faut affaiblir le facteur de qualité de circuit.

La phase de la fonction de transfert varie de 90° pour des basses fréquences à -90° pour des hautes fréquences. Les fréquences de résonances correspondent à -45° et +45°. A la résonance la phase est nulle.

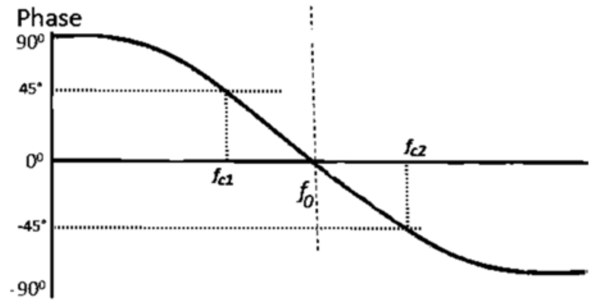

Figure 12 : Tracé de la phase de la fonction de transfert du filtre passe bande (A).

7. Applications des filtres dans le domaine de télécommunications

Les filtres sont présents partout dans les systèmes de télécommunications selon les différents besoins. On cite quelques applications :

- Suppression de la composante indésirable lors de la conversion et lors de la démodulation synchrone.
- Sélection du canal à recevoir et réjection des autres canaux.
- Suppression des parasites lors de la réception.
- Limitation de la puissance de bruit à l'entrée d'un récepteur.