

## Chapitre 4 : La modulation angulaire

### 1. Rappels

Pour un signal sinusoïdal de la forme :  $s(t) = A \cos \theta(t)$ , on définit :

La phase instantanée :

$$\theta(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(t) + \varphi_0$$

La fréquence instantanée :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

La déviation en fréquence (variation de la fréquence instantanée autour de  $f_0$ ) :

$$\delta f(t) = f(t) - f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Le déphasage instantané :

$$\varphi(t) = 2\pi \int \delta f(t) dt$$

### 2. Définition de la modulation angulaire

Dans la modulation angulaire, le signal utile module la phase instantanée  $\theta(t)$  d'une porteuse, donc soit la pulsation  $\omega$ , soit la phase  $\varphi$ .

#### 2.1. Définition de la modulation de fréquence

Dans la modulation de fréquence : (FM pour « Frequency Modulation »), le signal utile module la fréquence de la porteuse.

$$f(t) = f_0 + kb(t) \quad k : \text{une constante}$$

Donc, la forme d'un signal FM est donnée par :

$$S_{FM}(t) = A_p \cos(\omega_p t + 2\pi \int kb(t) dt + \varphi_0)$$

On définit :

- La déviation en fréquence :  $\delta f(t) = kb(t)$

- La déviation maximale en fréquence :  $\Delta f = k \cdot \max|b(t)|$
- L'indice de modulation :  $m = \max|\varphi(t)| = \frac{\Delta f}{f_{max}}$

Avec :  $f_{max}$  est la fréquence maximale de signal modulant.

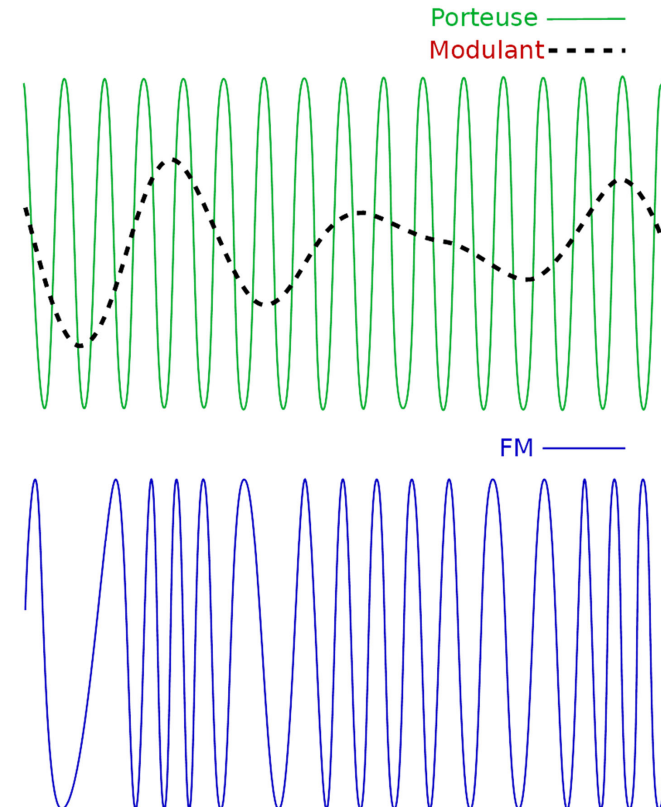


Figure 1 : Exemple de la modulation en fréquence d'une porteuse par un signal modulant.

#### Cas d'un signal modulant sinusoïdal :

Dans l'exemple d'un signal modulant de forme sinusoïdale :  $b(t) = A_b \cos(\omega_b t)$

- La phase instantanée :  $\theta(t) = 2\pi \int (f_p + kA_b \cos(\omega_b t)) dt$
- La forme de signal :  $S_{FM}(t) = A_p \cos(\omega_p t + \frac{kA_b}{f_b} \sin(\omega_b t) + \varphi_0)$
- La déviation maximale en fréquence :  $\Delta f = kA_b$
- L'indice de modulation :  $m = \frac{\Delta f}{f_b} = \frac{kA_b}{f_b}$

## 2.2. Définition de la modulation de phase

Dans la modulation de phase : (PM pour « Frequency Modulation »), le signal à transmettre module directement la phase instantanée de la porteuse.

$$S_{PM}(t) = A_p \cos(\omega_p t + kb(t) + \varphi_0)$$

On définit :

- Le déphasage instantané :  $\varphi(t) = kb(t)$
- La déviation maximale en phase :  $\Delta\varphi = k \cdot \max|b(t)|$
- L'indice de modulation :  $m = \max|\varphi(t)| = k \cdot \max|b(t)|$

### Cas d'un signal modulant sinusoïdal :

Si le signal modulant est sinusoïdal  $b(t) = A_b \cos(\omega_b t)$ , Alors :

- Le déphasage instantané :  $\varphi(t) = kA_b \cos(\omega_b t)$
- La forme de signal :  $S_{PM}(t) = A_p \cos(\omega_p t + kA_b \cos(\omega_b t) + \varphi_0)$
- La déviation maximale en phase :  $\Delta\varphi = kA_b$
- L'indice de modulation :  $m = kA_b$

## 2.3. Représentation vectorielle des modulations angulaires

On représente la porteuse  $p(t)$  par un vecteur de module  $A_p$  qui tourne avec une vitesse de rotation  $\omega_p$  (Figure 2).

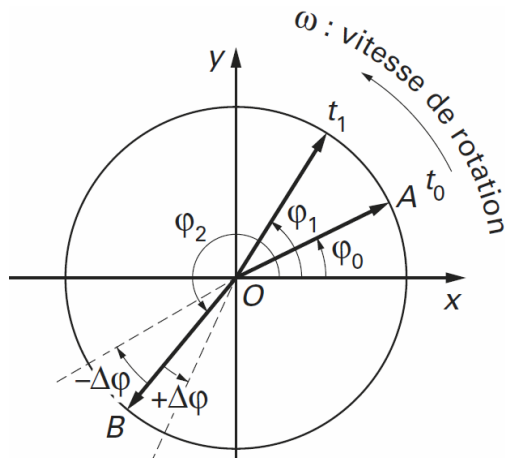


Figure 2 : Représentation des modulations FM et PM.

En FM, le signal modulant  $b(t)$  varie  $\omega$  la vitesse de rotation de vecteur porteuse  $\vec{OA}$  pendant le passage de la phase  $\varphi_0$  (à l'instant  $t_0$ ) à la phase  $\varphi_1$  (à l'instant  $t_1$ ). La phase de  $\vec{OA}$  varie indirectement avec les variations de  $b(t)$  donc une modulation de fréquence s'accompagne d'une modulation de phase.

En PM, le vecteur porteuse  $\vec{OB}$  oscille au rythme de signal modulant avec  $\pm\Delta\varphi$ . La fréquence de  $\vec{OB}$  varie indirectement avec les variations de  $b(t)$  donc une modulation de phase s'accompagne d'une modulation de fréquence.

## 3. Etude spectrale de la modulation angulaire

### 3.1. Tracé de spectre

On considère l'exemple d'une modulation de fréquence avec un signal modulant sinusoïdal :

$$S_{FM}(t) = A_p \cos(\omega_p t + m \sin(\omega_b t))$$

On utilise :  $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

D'où :

$$S_{FM}(t) = A_p \cos(\omega_p t) \cos(m \sin(\omega_b t)) - A_p \sin(\omega_p t) \sin(m \sin(\omega_b t))$$

Ce signal contient les termes  $\cos(m \sin(\omega_b t))$  et  $\sin(m \sin(\omega_b t))$ , Pour le mettre sous forme d'une somme de  $\cos(2\pi f_0 t)$  ou  $\sin(2\pi f_0 t)$  on utilise les fonctions de Bessel :

$$\begin{cases} \cos(m \sin(\theta)) = J_0(m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(m) \cos(2n\theta) \\ \sin(m \sin(\theta)) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(m) \sin((2n+1)\theta) \end{cases}$$

Ou bien :

$$\begin{cases} \cos(m \sin(\theta)) = J_0(m) + 2J_2(m)\cos(2\theta) + 2J_4(m)\cos(4\theta) + \dots \\ \sin(m \sin(\theta)) = 2J_1(m)\sin(\theta) + 2J_3(m)\sin(3\theta) + 2J_5(m)\sin(5\theta) + \dots \end{cases}$$

Les  $J_n(m)$  sont les coefficients de Bessel de première espèce d'ordre  $n$  et d'argument  $m$  (voir Figure 3).

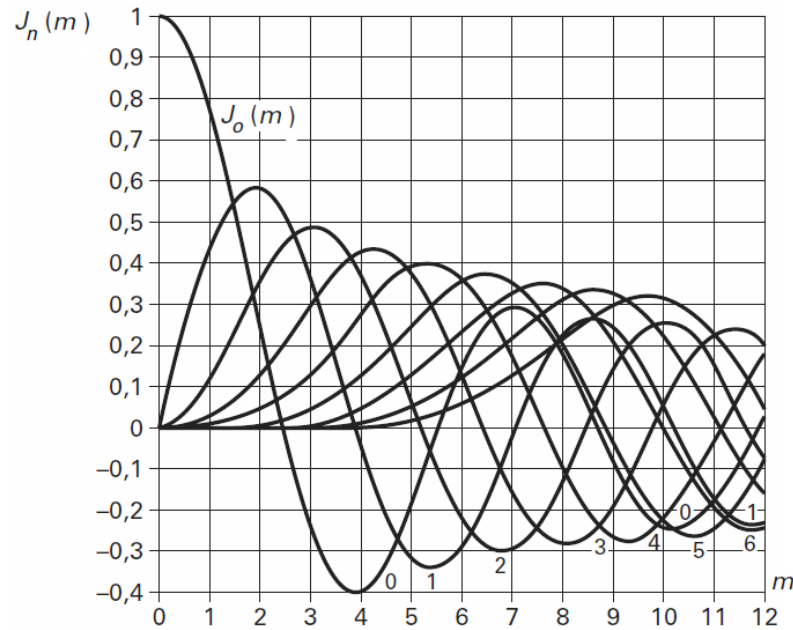


Figure 3 : Tracés des coefficients de Bessel de la première espèce pour des différents n en fonction de l'indice de modulation m.

Le tableau suivant donne les valeurs numériques des coefficients de Bessel  $J_n$  pour certaines valeurs de m.

m	J0	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	J10	J11	J12	J13	J14	J15	J16
0	1																
0.25	0.98	0.12															
0.5	0.94	0.24	0.03														
1	0.77	0.44	0.11	0.02													
1.5	0.51	0.56	0.23	0.06	0.01												
2	0.22	0.58	0.35	0.13	0.03												
2.5	-0.05	0.5	0.45	0.22	0.07	0.02											
3	-0.26	0.34	0.49	0.31	0.13	0.04	0.01										
4	-0.4	-0.07	0.36	0.43	0.28	0.13	0.05	0.02									
5	-0.18	-0.33	0.05	0.36	0.39	0.26	0.13	0.05	0.02								
6	0.15	-0.28	-0.24	0.11	0.36	0.36	0.25	0.13	0.06	0.02							
7	0.3	0	-0.30	-0.17	0.16	0.35	0.34	0.23	0.13	0.06	0.02						
8	0.17	0.23	-0.11	-0.29	-0.10	0.19	0.34	0.32	0.22	0.13	0.06	0.03					
9	-0.09	0.24	0.14	-0.18	-0.27	-0.06	0.2	0.33	0.30	0.21	0.12	0.06	0.03	0.01			
10	-0.25	0.04	0.25	0.06	-0.22	-0.23	-0.01	0.22	0.31	0.29	0.20	0.12	0.06	0.03	0.01		
12	-0.05	-0.22	-0.08	0.20	0.18	-0.07	-0.24	-0.17	0.05	0.23	0.30	0.27	0.20	0.12	0.07	0.03	0.01
15	-0.01	0.21	0.04	0.19	-0.12	0.13	0.21	0.03	-0.17	-0.22	-0.09	0.10	0.24	0.28	0.25	0.18	0.12

$S_{FM}$  devient :

$$S_{FM}(t) = A_p [J_0(m)\cos(\omega_p t) - 2J_1(m)\sin(\omega_b t)\sin(\omega_p t) + 2J_2(m)\cos(2\omega_b t)\cos(\omega_p t) - 2J_3(m)\sin(3\omega_b t)\sin(\omega_p t)] + \dots$$

Finalement, nous avons mis le signal FM sous la forme d'une somme de cosinus :

$$S_{FM}(t) = A_p \{ J_0(m)\cos(\omega_p t) + J_1(m)[\cos(\omega_p + \omega_b)t - \cos(\omega_p - \omega_b)t] + J_2(m)[\cos(\omega_p + 2\omega_b)t + \cos(\omega_p - 2\omega_b)t] + J_3(m)[\cos(\omega_p + 3\omega_b)t - \cos(\omega_p - 3\omega_b)t] + J_4(m)[\cos(\omega_p + 4\omega_b)t + \cos(\omega_p - 4\omega_b)t] + \dots \}$$

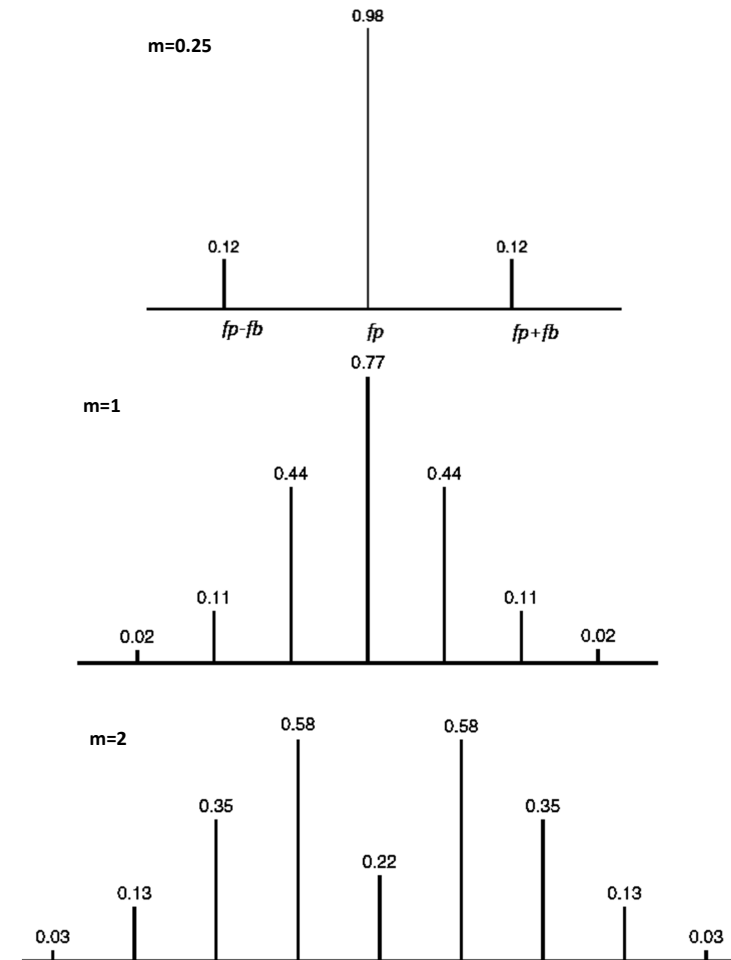


Figure 4 : Tracé de spectre de la FM pour m=0.25, m=1 et m=2 (Ap=1).

Le spectre de la FM se compose d'une infinité de doublets de raies centrées sur la porteuse  $f_p$ . Une raie latérale inférieure sur la fréquence  $f_p - nf_b$  et une raie latérale supérieure sur la fréquence  $f_p + nf_b$  (Figure 4). Le nombre de raies est limité, mais augmente avec l'indice de modulation  $m$ .

Dans le cas d'un signal modulant de forme quelconque, les raies latérales ne se transforment pas tout simplement en bandes latérales comme en AM.

Dans le cas d'un signal PM, le signal modulant est directement dans le cosinus :

$$S_{PM}(t) = A_p \cos(\omega_p t + m \cos(\omega_b t))$$

Par conséquent, le spectre de la PM ressemble au spectre de la FM.

### 3.2. Estimation de la bande passante

Logiquement, on doit transmettre toutes les raies d'un signal FM/PM. Donc la largeur de bande nécessaire pour la transmission peut devenir énorme. Comme les coefficients  $J_n(m)$  décroissent très rapidement en fonction de l'ordre  $n$ , l'idée c'est de ne pas transmettre les raies qui ont une puissance très faible.

Pour un indice de modulation faible ( $m \ll \pi/2$ ) :  $BP = 2f_{max}$

Avec :  $f_{max}$  est la fréquence maximale de signal modulant.

En général, on calcule la bande passante à 98% de la puissance totale par la formule de Carson :

$$BP = 2(m + 1)f_{max} = 2(\Delta F + f_{max})$$

## 4. Les circuits de modulation FM - PM

### 4.1. Modulateur FM à VCO

Un oscillateur commandé en tension (VCO), est un oscillateur qui génère à sa sortie une tension sinusoïdale avec une fréquence qui varie linéairement en fonction de la tension appliquée ( $V_e$ ) au niveau de son entrée.



Figure 5 : Schéma de principe d'un VCO.

Pour une tension  $V_e(t)$  la fréquence de signal de la sortie est :  $f = f_p + kV_e$

En insérant un signal utile  $b(t)$  à l'entrée d'un VCO, le signal de sortie s'écrit :

$$V_s(t) = A \cos(2\pi f_p t + 2\pi k \int b(t) dt)$$

Il s'agit d'un signal modulé en fréquence par  $b(t)$ .

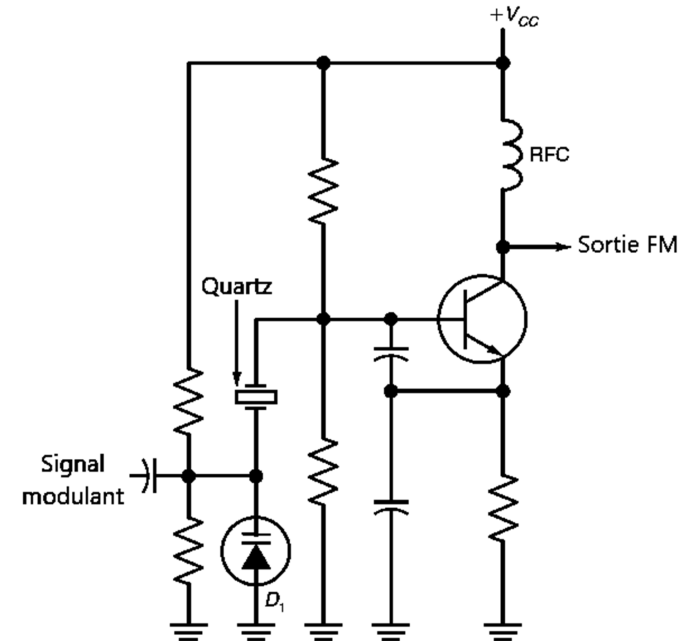


Figure 6: Exemple d'un VCO à transistor.

On utilise les oscillateurs à quartz pour leur stabilité en fréquence en fonction de la température et la tension de l'alimentation par exemple. Mais, ils ne permettent que des faibles déviations en fréquence  $\Delta f$  et donc des faibles indices de modulation.

### 4.2. Modulateur FM à fort indice de modulation

Pour générer la FM avec un fort indice de modulation, on utilise le principe montré par la figure 7.

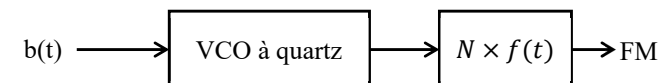


Figure 7: Schéma de principe d'un modulateur à fort indice de modulation.

Ce principe consiste à générer une modulation FM à faible indice de modulation. Ce signal passe par un multiplicateur de fréquence, la fréquence de signal est multipliée par  $N$ , de même pour la déviation en fréquence  $N$ . On obtient finalement une modulation FM avec un indice de modulation élevé avec une fréquence stable.

Par exemple on utilise un modulateur FM à quartz qui génère un signal avec  $f_p=6.5\text{MHz}$  et  $\Delta f=200\text{Hz}$ , et un multiplicateur de fréquence  $\times 24$ . À la sortie de multiplicateur on récupère un signal FM à  $156\text{MHz}$  et une  $\Delta f=4.8\text{KHz}$ .

### 4.3. Modulateur d'Armstrong pour la PM

Le système suivant est le schéma bloc du modulateur d'Armstrong:

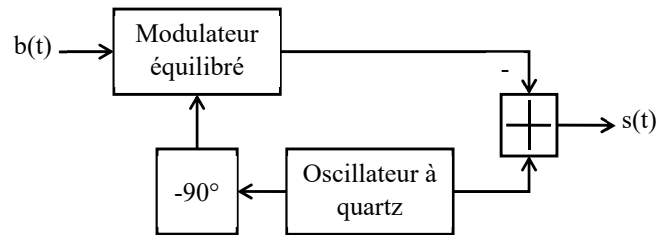


Figure 8 : Modulateur d'Armstrong.

L'oscillateur fournit un signal de la forme :  $p(t) = \cos(\omega_p t + \varphi_0)$

Donc à la sortie on a :  $s(t) = \cos(\omega_p t + \varphi_0) - b(t)\sin(\omega_p t + \varphi_0)$

Pour un signal  $b(t)$  faible :  $\sin(b(t)) \approx b(t)$  et  $\cos(b(t)) \approx 1$

La sortie s'écrit :  $s(t) \approx \cos(b(t))\cos(\omega_p t + \varphi_0) - \sin(b(t))\sin(\omega_p t + \varphi_0)$

Finalement on obtient :  $s(t) = \cos(\omega_p t + b(t) + \varphi_0)$

Il s'agit d'un modulateur PM qui fonctionne pour ( $m \ll 1$ ).

## 5. Les circuits de démodulation FM - PM

### 5.1. Démodulation par discriminateur (asynchrone)

Un discriminateur permet d'avoir la fréquence instantanée d'un signal FM appliqué à son entrée, sur son amplitude. Le résultat est un signal modulé en amplitude et en fréquence. Il suffit par la suite d'utiliser un détecteur d'enveloppe pour restituer le signal utile.

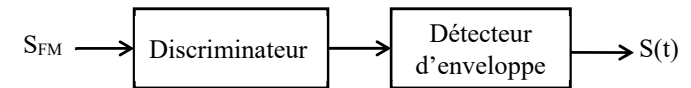


Figure 9 : Principe de la démodulation avec discriminateur.

Il est possible d'utiliser un circuit dérivateur (filtre RC) :

Soit un signal FM :  $S_{FM}(t) = A\cos(2\pi f_p t + 2\pi k \int b(t) dt)$

$$\frac{dS_{FM}(t)}{dt} = -A(2\pi f_p + 2\pi k b(t))\sin\left(2\pi f_p t + 2\pi k \int b(t) dt\right)$$

Ce dernier signal est modulé par  $b(t)$  en fréquence et en amplitude. Il suffit d'utiliser un détecteur d'enveloppe pour restituer le signal utile.

Dans la pratique, on utilise la partie linéaire de la caractéristique d'un circuit oscillant (LC) désaccordé par rapport à la fréquence de la porteuse.

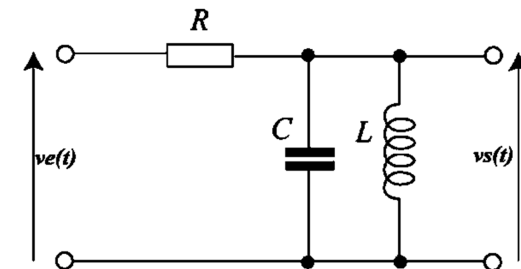


Figure 10 : Un circuit oscillant utilisé comme discriminateur.

Dans la figure 11, la fréquence de résonance de circuit est  $f_r$  et la fréquence de la porteuse est  $f_p$ .

On considère que la portion AB est linéaire, alors l'équation de la pente (gain) est de la forme :  $H(f) = \alpha f + \beta$  Avec :  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes.

Si le signal à l'entrée de circuit est un signal FM :

$$v_s(t) = H(f)S_{FM}$$

D'où :  $v_s(t) = A(\alpha f_p + \alpha k b(t) + \beta)\cos(2\pi f_p t + 2\pi k \int b(t) dt)$

Le signal utile  $b(t)$  se trouve dans l'amplitude de  $v_s(t)$ .

Le circuit de la figure 10, sert à présenter le principe de fonctionnement, mais sa caractéristique n'est pas vraiment linéaire. Dans la pratique on utilise des circuits plus performants comme le discriminateur de Foster-Seely.

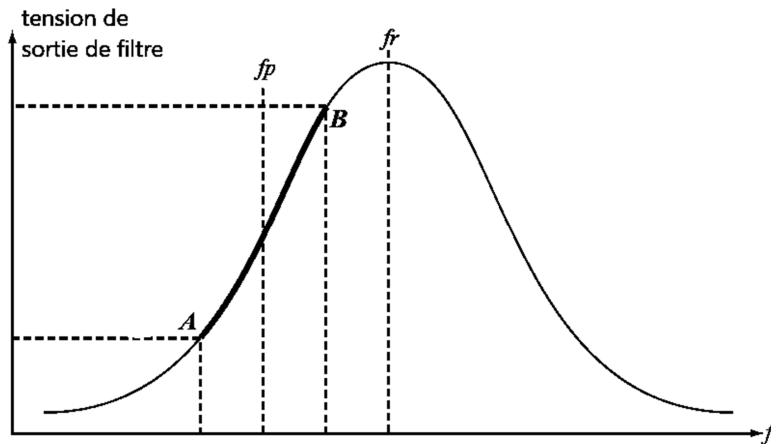


Figure 11: Caractéristique tension-fréquence d'un circuit oscillant.

### 5.2. Discriminateur à quadrature

Dans un discriminateur à quadrature, un circuit déphaseur ajoute à la phase d'un signal FM une phase  $\Delta\theta$  qui dépend de la variation de la fréquence instantanée donc de signal modulant.

Si :  $S_{FM}(t) = A \cdot \cos(\theta(t))$

Alors, à la sortie de déphaseur on a :  $S'(t) = A \cdot \cos(\theta(t) + \Delta\theta)$

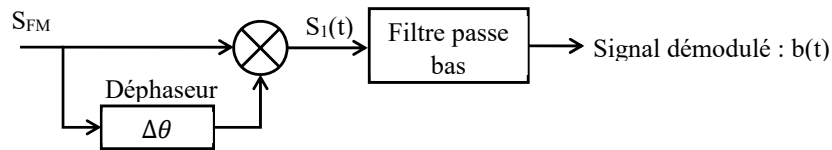


Figure 12 : Caractéristique tension-fréquence d'un circuit oscillant.

Le signal FM et le signal FM déphasé sont appliqués aux entrées d'un détecteur de phase. Ce dernier peut être un modulateur équilibré par exemple.

A la sortie de détecteur de phase, on obtient :

$$S_1(t) = A \cdot \cos\theta(t)A \cdot \cos(\theta(t) + \Delta\theta) = \frac{A^2}{2} \cos(2\theta(t) + \Delta\theta) + \frac{A^2}{2} \cos(\Delta\theta)$$

Le filtre passe bas élimine le terme à haute fréquence, il ne reste que :

$$S(t) = \frac{A^2}{2} \cos(\Delta\theta)$$

Si le déphasage est de la forme :  $\Delta\theta = ab(t) - \frac{\pi}{2}$ , le signal à la sortie s'écrit :

$$S(t) = \frac{A^2}{2} \cos\left(ab(t) - \frac{\pi}{2}\right)$$

La variation de  $\Delta\theta$  est autour de  $\frac{\pi}{2}$  (d'où le nom de ce discriminateur).

Comme :  $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$ , alors :  $S(t) = \frac{A^2}{2} \sin(ab(t))$

Le terme  $ab(t)$  est petit donc :  $s_1(t) \approx ab(t)$

On a finalement restitué le signal utile à partir d'un signal FM.

La figure (13) montre le circuit déphaseur dans un discriminateur à quadrature.

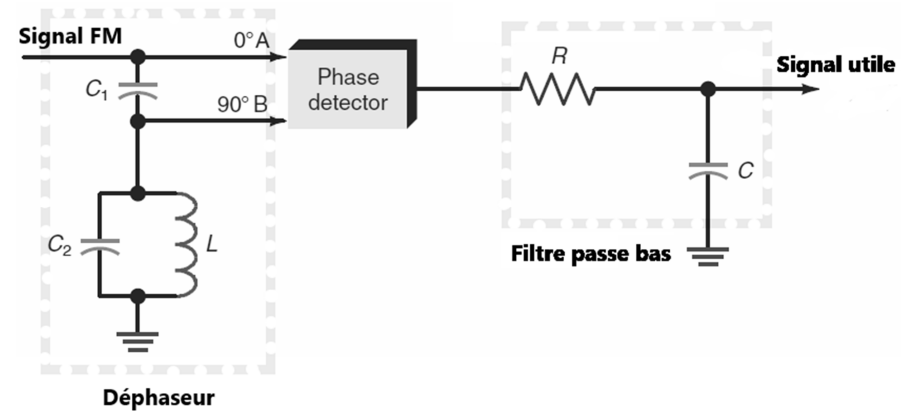


Figure 13 : Circuit déphaseur pour un discriminateur à quadrature.

Le circuit (LC<sub>2</sub>) est calculé pour qu'il résonne à la fréquence de la porteuse  $f_p$ , sa phase est nulle à la résonance, et elle varie autour de  $0^\circ$  si la fréquence instantanée de signal d'entrée varie autour de  $f_p$ .

Dans le cas d'un signal FM, la variation de la fréquence instantanée est proportionnelle au signal modulant. Donc la phase de signal à la sortie de résonateur (LC<sub>2</sub>) est proportionnelle au signal modulant  $\Delta\theta = ab(t)$ .

A cause de la capacité  $C_1$  :  $\Delta\theta = ab(t) - \frac{\pi}{2}$

### 5.3. Démodulation par la boucle à verrouillage de phase

La figure suivante montre le schéma bloc de la boucle à verrouillage de phase (Phase Locked Loop = PLL).

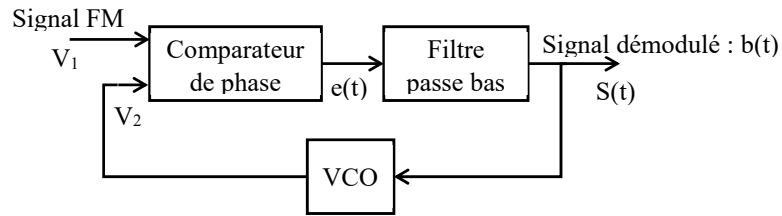


Figure 14 : Démodulateur à PLL.

Le VCO fournit le signal :  $V_2(t) = A_2 \cos(\omega_p t + \varphi_2)$ .

Si à l'entrée on a :  $V_1(t) = A_1 \cos(\omega_p t + \varphi_1)$

La PLL délivre à sa sortie une tension proportionnelle au déphasage entre les signaux d'entrée :  $S(t) = K(\varphi_1 - \varphi_2) = K\Delta\varphi$

Toute variation de la fréquence instantanée du signal d'entrée est détectée par le comparateur de phase et génère une tension qui corrige la fréquence de VCO pour qu'elle soit égale à la fréquence de signal d'entrée.

Si un signal FM est appliqué à l'entrée, le VCO essaye de produire un signal avec la même fréquence instantanée du signal FM. Le détecteur de phase calcule la différence entre la phase de signal FM et la phase de signal du VCO et génère une tension  $V_s$  qui corrige la fréquence du VCO. Donc  $V_s$  doit être proportionnelle au signal modulant.

$$S(t) = Kb(t)$$

Si un signal FM est présent à l'entrée de la PLL, on récupère le signal utile à la sortie.

## 6. Equivalence entre FM et PM

En comparant l'expression de la FM à l'expression de la PM, on peut dire qu'un signal PM est un signal FM dont le signal modulant a été dérivé. Un signal FM est un signal PM dont le signal modulant a été intégré.

Donc, il est possible par exemple de faire passer le signal modulant par un intégrateur puis un modulateur PM, on obtient un signal FM. On dit qu'il s'agit d'une modulation indirecte.

La figure (15) montre 4 possibilités de modulation et de démodulation indirectes :

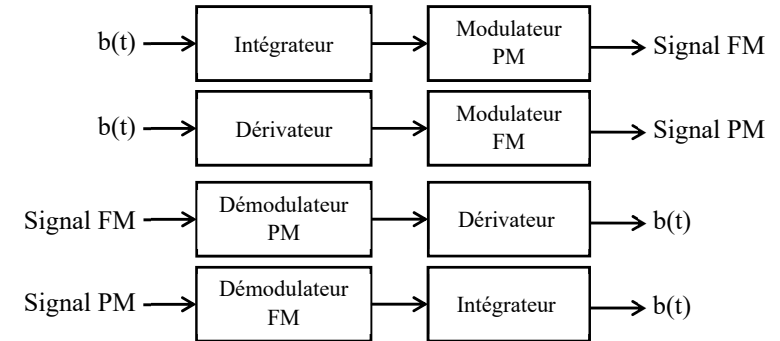


Figure 15 : Modulations / démodulations indirectes.

## 7. Avantages et inconvénients de la modulation FM/PM

### 7.1. Avantages

- Bonne qualité de transmission.
- Faible sensibilité aux parasites d'amplitude (les bruits les plus importants).
- Puissance transmise constante.
- Indice de modulation non limité.

### 7.2. Inconvénients

- Largeur de bande nécessaire élevée.
- Utilisation de fréquence de transmission élevée, réduit la portée de la transmission.
- Circuits de modulation et de démodulation relativement compliqués, donc coûteux.

### Bibliographie :

1. Louis E. Frenzel Jr ; Principles of Electronic Communication Systems, Fourth Edition ; McGraw-Hill Education, 2016.
2. John G. Proakis, Masoud Salehi ; Communication systems engineering, 2nd Ed. ; Prentice-Hall, Inc. 2002.
3. François de Dieuleveult, Olivier Romain ; Electronique appliquée aux hautes fréquences, Principes et applications, 2e édition ; Dunod, 2008.
4. Leon W. Couch II ; Digital and analog communication systems, Eighth Edition ; Pearson Education, Inc, 2013.