Télécommunications Fondamentales : Examen (1H30mn)

Exercice 1 (5 pts)

Un signal $s(t) = 3\cos(8\pi \times 10^3\, t) + 6\cos(20\pi \times 10^3\, t)$ module en amplitude une porteuse donnée par : $\cos(4\pi \times 10^4\, t)$

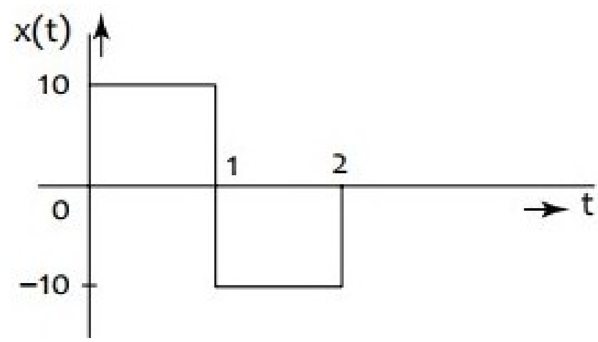
1. Écrire l'expression du signal modulé en amplitude (AM).
2. Représenter le spectre en fréquence du signal AM obtenu.
3. Calculer la puissance totale du signal AM.
4. Le signal $s(t)$ est multiplié par un paramètre réel K avant la modulation. Déterminer la valeur de K permettant d'obtenir un indice de modulation de 100 %.

Exercice 2 (5pts)

Un signal FM est donné par :

$$s(t) = 50\cos\left(2\pi f t + 50\int_0^t x(\tau)\,d\tau\right)$$

où le signal modulant $x(t)$ est représenté dans la figure ci-contre.



1. Écrire l'expression de la fréquence instantanée du signal FM pour $0 \leq t \leq 2$ secondes.
2. Tracer la fréquence instantanée ainsi que le signal modulé $s(t)$ pour $0 \leq t \leq 2$ secondes.
3. Quelle est la valeur de constante de modulation ?
4. Quelle est la déviation maximale de fréquence ?

Exercice 3 (5pts)

Une ligne de transmission sans pertes, de longueur $\lambda/4$ et d'impédance caractéristique $Z_0 = 50\,\Omega$, est terminée par une impédance de charge $Z_R = j\,50\,\Omega$.

1. Calculer le coefficient de réflexion à la charge Γ_R, en précisant son module et sa phase.
2. En déduire le rapport d'ondes stationnaires.
3. Calculer la puissance absorbée par la charge, expliquer le résultat obtenu.
4. Déterminer l'impédance d'entrée de la ligne.

Exercice 4 (5pts)

Une ligne de transmission sans pertes, d'impédance caractéristique Z_C, est terminée par une impédance de charge Z_R. Les expressions de la tension et du courant le long de la ligne sont données par :

$$\begin{cases} V(x,t) = V_i e^{j(\omega t - \beta x)} + V_r e^{j(\omega t + \beta x)} \\ I(x,t) = I_i e^{j(\omega t - \beta x)} + I_r e^{j(\omega t + \beta x)} \end{cases}$$

1. Écrire les équations de propagation de la tension et du courant le long de la ligne en fonction de la tension incidente et du coefficient de réflexion à la charge.
2. En utilisant ces équations, déterminer l'expression de la puissance moyenne active en tout point de la ligne.
3. Sachant que l'amplitude de la tension aux bornes de la charge est de 12 V et celle du courant qui la traverse est de 2 A, calculer la puissance absorbée par la charge.
4. Si le coefficient de réflexion à la charge a pour valeur (0.4), en déduire la puissance délivrée par le générateur.

Corrigé

Exercice 1

1. **Expression du signal modulé en amplitude :**

Le signal AM s'écrit sous la forme : $s_{\mathrm{AM}}(t) = [1 + s(t)] \cdot \cos(\omega_c t)$

Ainsi, l'expression du signal AM est :

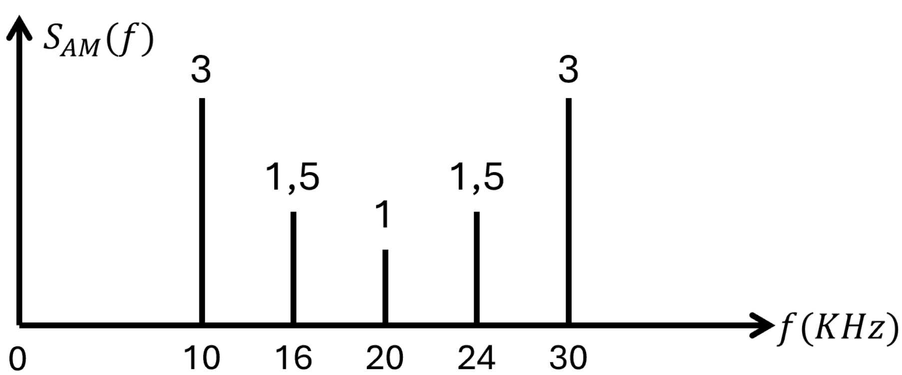
$$s_{\mathrm{AM}}(t) = [1 + 3\cos(8\pi \cdot 10^3\, t) + 6\cos(20\pi \cdot 10^3\, t)] \cos(4\pi \cdot 10^4\, t)$$

2. **Spectre en fréquence du signal AM :**

$$s_{\mathrm{AM}}(t) = [1 + 3\cos(2\pi \cdot 4 \cdot 10^3\, t) + 6\cos(2\pi \cdot 10 \cdot 10^3\, t)] \cos(2\pi \cdot 20 \cdot 10^3\, t)$$

$$s_{\mathrm{AM}}(t) = \cos(2\pi \cdot 20 \cdot 10^3\, t) + 3\cos(2\pi \cdot 4 \cdot 10^3\, t)\cos(2\pi \cdot 20 \cdot 10^3\, t) + 6\cos(2\pi \cdot 10 \cdot 10^3\, t)\cos(2\pi \cdot 20 \cdot 10^3\, t)$$

$$s_{\mathrm{AM}}(t) = \cos(2\pi \cdot 20 \cdot 10^3\, t) + 1.5\cos(2\pi \cdot 24 \cdot 10^3\, t) + 1.5\cos(2\pi \cdot 16 \cdot 10^3\, t) + 3\cos(2\pi \cdot 30 \cdot 10^3\, t) + 3\cos(2\pi \cdot 10 \cdot 10^3\, t)$$



3. **Puissance totale du signal AM**

$$P_{\mathrm{tot}} = \sum \frac{A^2}{2R} = \frac{1^2}{2R} + 2\frac{1.5^2}{2R} + 2\frac{3^2}{2R} = \frac{11.75}{R}$$

4. **Valeur de K pour un indice de modulation de 100 %**

Après multiplication du signal modulant par un facteur réel K, on obtient :

$$K s(t) = K \cdot 3\cos(8\pi \cdot 10^3 t) + K \cdot 6\cos(20\pi \cdot 10^3 t)$$

 S.LABANDJI

L'indice de modulation total en modulation AM avec plusieurs composantes est donné par :

$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \quad \text{avec} \quad m_1 = \frac{K \cdot 3}{A_p}, \quad m_2 = \frac{K \cdot 6}{A_p}$$

Donc :

$$m = \sqrt{\left(\frac{3K}{1}\right)^2 + \left(\frac{6K}{1}\right)^2} = K \cdot \sqrt{45}$$

Pour un indice de modulation $m = 1$, on trouve: $K = 0.149$

Exercice 2 :

1. l'expression de la fréquence instantanée du signal FM :

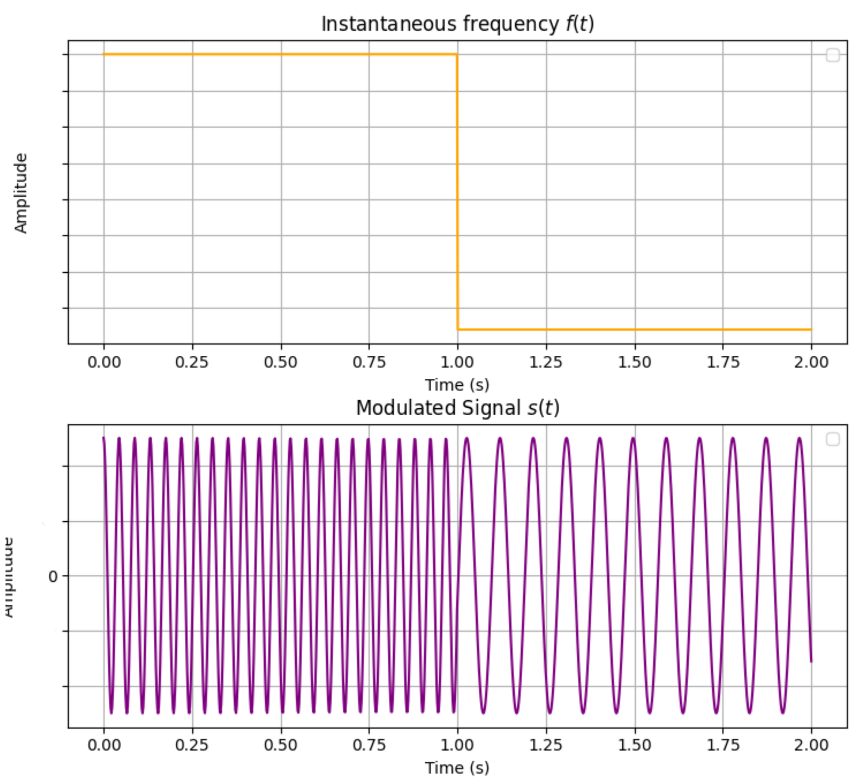
$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt}$ On a : $\theta(t) = 2\pi ft + 50\int_0^t x(t)\,dt$

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(2\pi ft + 50\int_0^t x(t)\,dt) = f + \frac{50x(t)}{2\pi}$

$$f(t) = f + \frac{25}{\pi}x(t)$$

2. Tracés de $f(t)$ et de $s(t)$ pour (0 $\leq$t $\leq$2 , seconds) :

$$f(t) = \begin{cases} f + \frac{250}{\pi}, & \text{for } 0 < t < 1s, \\ f - \frac{250}{\pi}, & \text{for } 1 < t < 2s. \end{cases}$$



3. La constante de modulation :

$f(t) = f + k \times x(t)$

Par identification : $k_f = \dfrac{25}{\pi} = 7.96Hz/V$

4. La déviation maximale de fréquence:

$\Delta F = k_f \times max(x(t)) = 7.96 \times 10 = 79.6Hz$

Exercice 3 (5pts)

1. Le coefficient de réflexion à la charge :

$$\Gamma_R = \frac{Z_R - Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{j50 - 50}{j50 + 50} = 1\angle\frac{\pi}{2}$$

2. Le rapport d'ondes stationnaires :

$$ROS = \frac{1 + |\Gamma_R|}{1 - |\Gamma_R|} = \frac{1+1}{1-1} = +\infty$$

3 La puissance absorbée par la charge :

$$P = P_i(1 - |\Gamma_R|^2) = P_i(1-1) = 0W$$

Aucune puissance n'est dissipée dans la charge car elle est purement réactive, d'où le module de coefficient de réflexion à la charge vaut 1 qui veut dire une réflexion totale.

4. L'impédance d'entrée de la ligne :

$$Z_\mathrm{e} = Z(l) = Z_C \cdot \frac{Z_R + jZ_C\tan(\beta\ell)}{Z_C + jZ_R\tan(\beta\ell)}$$

Dans notre cas $\ell = \dfrac{\lambda}{4}$, donc : $\beta\ell = \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{\lambda}{4} = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan(\beta\ell) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \to \infty$

$$Z_\mathrm{e} = \frac{Z_0^2}{Z_R} = \frac{(50)^2}{j\,50} = -j\,50\ \Omega$$

Exercice 4

1. Équations de propagation en fonction du coefficient de réflexion Γ_R :

On sais que : $V_r = \Gamma_R V_i \qquad$ et : $I_i = \dfrac{V_i}{Z_C}, \qquad I_r = -\dfrac{V_r}{Z_C}$

Donc :

$$V(x,t) = V_i e^{-j\beta x}(1 + \Gamma_R e^{2j\beta x})e^{j\omega t}$$

$$I(x,t) = \frac{V_i}{Z_C}e^{-j\beta x}(1 - \Gamma_R e^{2j\beta x})e^{j\omega t}$$

2. Puissance en tout point de la ligne :

La puissance moyenne : $P(x,t) = \dfrac{1}{2}\Re[V(x,t)I^*(x,t)]$

Le produit complexe donne :

$$V(x)I^*(x) = (V_i e^{-j\beta x}(1+\Gamma_R e^{2j\beta x})e^{j\omega t})(\frac{V_i^*}{Z_C}e^{j\beta x}(1-\Gamma_R^* e^{-2j\beta x})e^{-j\omega t})$$

$$V(x)I^*(x) = V_i\frac{V_i^*}{Z_C}(1+|\Gamma_R|e^{2j\beta x+j\varphi})(1-|\Gamma_R|e^{-2j\beta x-j\varphi})$$

$$V(x)I^*(x) = \frac{|V_i|^2}{Z_C}(1+|\Gamma_R|e^{j(2\beta x+\varphi)}-|\Gamma_R|e^{-j(2\beta x+\varphi)}-|\Gamma_R|^2)$$

$$V(x)I^*(x) = \frac{|V_i|^2}{Z_C}[1-|\Gamma_R|^2+|\Gamma_R|(e^{j(2\beta x+\varphi)}-e^{-j(2\beta x+\varphi)})]$$

$$V(x)I^*(x) = \frac{|V_i|^2}{Z_C}[1-|\Gamma_R|^2+j2|\Gamma_R|\sin(2\beta x+\varphi)]$$

En prenant la partie réelle :

$$P = \frac{|V_i|^2}{2Z_C}\left(1-|\Gamma_R|^2\right)$$

3. Puissance absorbée par la charge : On a $V_R = 12$ V et $I_R = 2$ A

$$P_R = \frac{1}{2}\cdot|V_R|\cdot|I_R| = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 2 = 12 \text{ W}$$

4. Puissance délivrée par le générateur :

La puissance délivrée par le générateur est la puisance incidente :

$$P_i = \frac{|V_i|^2}{Z_C} = \frac{P_R}{1-|\Gamma_R|^2} = \frac{12}{1-0{,}4^2} = 14.29\,\text{W}$$